

ISSN 2072-2710

2010 / 7 (31)

Производственно-технический
и научно-практический журнал



Технологии
Оборудование
Передовой опыт



ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ ВОДОПОДГОТОВКИ С ГАРАНТИЕЙ КОРРЕКТНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА

Кожевников А.Б.

канд. техн. наук, генеральный директор

Петросян О.П.

канд. физ.-матем. наук, доцент

ФСП «КРАВТ»

г. Калуга

КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана

г. Калуга

Предлагаемый численно-аналитический метод позволяет определить аналитическое выражение для динамической характеристики объекта управления, являющейся решением линейного дифференциального уравнения (обыкновенного, либо с частными производными), описывающего соответствующий процесс.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый численно-аналитический метод позволяет определить аналитическое выражение для динамической характеристики объекта управления, являющейся решением линейного дифференциального уравнения (обыкновенного, либо с частными производными), описывающего соответствующий процесс. Ее основу составляют алгоритмы, объединяющие принцип минимальной сложности [1,2] и метод моментов [3], что позволило сформировать методологию спектральной оптимизации приближений при решении линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными и переменными коэффициентами. Ее применение позволяет найти приближенное решение исходного дифференциального уравнения в виде гарантированно быстросходящегося ряда в классе линейно независимых функций, что является гарантией корректности результата, при выполнении всех процедур счета на компьютере.

Сформулированные выше дифференциальные уравнения описывают достаточно широкий класс математических моделей объектов и процессов в технологиях водоподготовки и сопутствующих технологиях получения стабильных по структуре и составу реагентов. Это инжекционные и эжекционные процессы [4], диффузионные процессы [5,6], фор-

мирование стабильного коагуланта [7], а также иные процессы тепло- и (или) массообмена [8], а также иные динамически развивающиеся процессы [9].

Дифференциальные уравнения этой математической модели не имеют точного решения, а их приближения, которые могут быть получены различными методами, не гарантируют, прежде всего, достаточной скорости сходимости аппроксимирующих выражений, за исключением ряда упрощенных описаний таких процессов.

В соответствии с предлагаемой методологией исходное дифференциальное уравнение преобразуется в интегральное уравнение с помощью многократного интегрального преобразования, а затем искомое решение строится в виде ряда по системе линейно независимых функций, построенных сечениями ядра интегрального уравнения и обеспечивающими наибольшую скорость сходимости приближения к точному решению.

КЛАСС РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ

Пусть состояние объекта описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\sum_{i_1=0}^{I_1} \dots \sum_{i_m=0}^{I_m} a_{i_1 \dots i_m}(x) \frac{\partial^{i_1 \dots i_m}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} z(x) = y(x) \quad (1)$$

коэффициенты которого $\{a_{i_1 \dots i_m}(x)\}$ и свободный член $y(x)$ определены в некоторой связной области σ изменения $x = (x_1, \dots, x_m)$. Одна из независимых переменных есть время (например, $x_m = t$). Заданы краевые условия, обеспечивающие существование и единственность решения уравнения (1):

$$R_j(x, \partial)z(x) = r_j(x)|_{x \in \Omega}, \quad j = 1 \dots v \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$; $\{R_j\}$ —линейные в общем случае нестационарные операторы.

Необходимо найти приближенное выражение для искомой функции $z(x)$ в виде разложения в ряд по системе линейно независимых функций:

$$\tilde{z}(x) = \sum_{i=1}^n D_i f_i(x) \quad (3)$$

При этом требуемая точность приближения в классе функций, интегрируемых квадратом [10], т.е. $z(x) \in L_2[0, \infty)$, а именно:

$$\|z(x) - \tilde{z}_v(x)\|_2^2 \leq \delta \quad (4)$$

должна быть достигнута при минимальном значении в этом классе функций.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Преобразуем дифференциальное уравнение (1) в интегральное при помощи непосредственного применения к нему m -кратного неспециального интегрального преобразования, например, преобразования Лапласа [11]. Учитывая полученные при этом соотношения между краевыми значениями искомой функции и ее производных, введем в преобразованное уравнение заданные краевые условия (2), выполнив требуемые для этого интегральные преобразования над ними. Если вид коэффициентов исходного дифференциального уравнения (1) и краевых условий (2) позволяет вместо интегрирования в комплексной области воспользоваться табличными формулами, то в итоге получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{\sigma} K(q, x)z(x)dx = Y(q) \quad (x \in \sigma, q \in Q) \quad (5)$$

где $q = (s, p)$; $s = (s_1, \dots, s_m)$ — m -мерный параметр интегрального преобразования, $q = (s, p)$; $s = (s_1, \dots, s_m)$ — m -мерный параметр интегрального преобразования, $p = (p_1, \dots, p_r)$ — r -мерный параметр, появление которого связано с аналитическими преобразованиями для обеспечения условия, что $Y(q)$ —известная функция, в которую входят принятые интегральное преобразование известной функции $y(x)$ и заданных краевых условий [2]. Вектор q имеет размерность $M = m + r$.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРА

Для определения коэффициентов необходимо, как известно [10], минимизировать функционал:

$$\left\| z(x) - \sum_{i=1}^n D_i f_i(x) \right\|_2^2. \quad (6)$$

Условие абсолютного минимума этого функционала относительно $\{D_i\}$ имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n D_i \int_{\sigma} f_j(x) f_i(x) dx = \int_{\sigma} f_j(x) z(x) dx, \quad j = 1, \dots, n \leq N(\epsilon). \quad (7)$$

Интегральное уравнение (5) позволяет сформировать совокупность исходных базисов $\{f_i^v(x)\}$, $v = 1, 2, \dots$ которые строятся по правилу:

$$f_j(x) = f(\alpha_j, x) = K(q, x) \Big|_{q=\alpha_j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

и каждому из них соответствует упорядоченная система числовых значений $\{\alpha_i^v\}$, $v = 1, 2, \dots$ параметра q из области возможных значений Q , а также элемент

$$\tilde{z}_v(x) = \sum_{i=1}^{n_v} D_i^v f_i^v(x), \quad n_v \leq N(\epsilon), \quad v = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

доставляющий абсолютный минимум квадратичному функционалу

$$I = \|z(x) - \tilde{z}_v(x)\|_2^2 = \int_{\sigma} [z(x) - \tilde{z}_v(x)]^2 dx \quad (10)$$

при значениях коэффициентов $\{D_i^v\}$, удовлетворяющих системе алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n_v} D_i^v a_{ij}(\alpha_i^v \alpha_j^v) = Y(\alpha_j^v), \quad \alpha_i^v, \alpha_j^v \in Q, \quad j = 1, \dots, n_v \leq N(\epsilon) \quad (11)$$

при любом из возможных значений $v = 1, 2, \dots$, причем элементы матрицы (a_{ij}) вычисляются по формуле

$$a_{ij}(\alpha_i^v \alpha_j^v) = \int_{\sigma} K(\alpha_i^v, x) K(\alpha_j^v, x) dx, \quad \alpha_i^v, \alpha_j^v \in Q, \quad j = 1, \dots, n_v \leq N(\epsilon) \quad (12)$$

Для отыскания искомого базиса выполним в (10) возведение в квадрат и учтем, что $\tilde{z}_v(x)$ вычисляется по формуле (3). В результате получим

$$I = \int_{\sigma} [z(x)]^2 dx - 2 \sum_{i=1}^{n_v} D_i^v \int_{\sigma} f_i^v(x) z(x) dx + \sum_{i=1}^{n_v} \sum_{j=1}^{n_v} D_i^v D_j^v a_{ij}(\alpha_i^v \alpha_j^v), \quad (13)$$

а так как

$$\int_{\sigma} f_i^v(x) z(x) dx = \int_{\sigma} K(\alpha_i^v, x) z(x) dx = Y(\alpha_i^v) \quad (14)$$

при $\alpha_i^v \in Q$, $i = 1, \dots, n_v \leq N(\epsilon)$, $v = 1, 2, \dots$, то

$$I = \int_{\sigma} [z(x)]^2 dx - 2 \sum_{i=1}^{n_v} D_i^v Y(\alpha_i^v) + \sum_{i=1}^{n_v} \sum_{j=1}^{n_v} D_i^v D_j^v a_{ij}(\alpha_i^v \alpha_j^v). \quad (15)$$

Учитывая, что

$$\int_{\sigma} [z(x)]^2 dx = \|z(x)\|_2^2 = const, \quad (16)$$

а также равенства (11), делаем вывод, что координаты минимума функционала (13), совпадают с координатами минимума функции

$$F = - \sum_{i=1}^{n_v} D_i^v Y(\alpha_i^v) \quad (17)$$

для любой из числовых последовательностей $\{a_i^v\}$, $v=1,2,\dots$ (в обозначениях f_i^v , d_i^v , a_i^v v есть индекс), если значения коэффициентов $\{d_i^v\}$ определены решением системы (11).

Отсюда следует, что найдется такая числовая последовательность $\{a_i^k\}$ при фиксированном $n_k \leq N(\varepsilon)$ где k есть одно из возможных значений $v=1,2,\dots$, которая обеспечит более глубокий абсолютный минимум квадратичному функционалу (13) и функции F по коэффициентам $\{d_i^k\}$, т.е. обеспечит наилучшее из возможных приближений к $z(x)$ в метрике пространства L_2 . А значит, возможно достижение требуемой точности приближения при минимальном значении n . Если же поиск этого базиса вести с учетом градаций сложности, определяемых некоторой заданной шкалой сложности M [2], то будет найден искомый оптимальный базис.

Итак, принятый подход к решению краевой задачи (1), (2) позволяет формализовать задачу построения оптимального базиса и сформулировать ее следующим образом.

Пусть задана шкала сложности M .

ЗАДАЧА 1-М

Найти такие значения $n^*, \alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$, что

$$F(n^*, \alpha^*) = \min_{n \leq N(\varepsilon), \alpha \in Q} \left[-\sum_{i=1}^n D_i Y(\alpha_i) \right], \quad (18)$$

где значения $\{d_i\}$ есть решение системы

$$\sum_{i=1}^n D_i a_{ij}(\alpha_i, \alpha_j) = Y(\alpha_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (19)$$

при ограничении $\|z - \tilde{z}\| \leq \delta_0$ и минимально возможной сложности базиса $\{f_i\}$, определяемой шкалой M .

Решением этой задачи является базис $\{f_i^*(x)\}$, где

$$f_i^*(x) = K(\alpha_i^*, x), \quad i = 1, \dots, n^* \quad (20)$$

и элемент

$$\tilde{z}^*(x) = \sum_{i=1}^{n^*} D_i^* f_i^*(x). \quad (21)$$

Будем называть процедуру поиска базиса $\{f_i^*(x)\}$ и элемента $\tilde{z}^*(x)$ в соответствии с постановкой задачи 1-М спектральной оптимизацией искомого приближения или модели, а построенный при этом базис — оптимальным в смысле поставленной задачи.

АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Алгоритм вычисления $\tilde{z}^*(x)$ по изложенной методике при известном уравнении (5) можно записать следующим образом:

Шаг 1. Положить $v=1$

Шаг 2. Положить $\varepsilon = \varepsilon_v$ ($\varepsilon_v > \varepsilon_{v+1}$, $v=1,2,\dots$)

Шаг 3. Определить $N(\varepsilon)$

Шаг 4. Положить $n=k$

Шаг 5. Вычислить a_1^*, \dots, a_n^* , при которых

$$F(n^*, \alpha^*) = \min_{n \leq N(\varepsilon), \alpha \in Q} \left[-\sum_{i=1}^n D_i Y(\alpha_i) \right]$$

Шаг 6. Определить $f_j = f(\alpha_j^*, x)$ ($j = 1, \dots, n$)

Шаг 10. Вычислить $\tilde{z}^*(x)$ по формуле (2).

Шаг 11. Если $\|z - \tilde{z}\| \leq \delta$ то перейти к шагу 15.

Шаг 12. Если $\|z - \tilde{z}\| > \delta$ то положить $n=n+1$

Шаг 13. Если $n \leq N(\varepsilon)$, то перейти к шагу 5.

Шаг 14. Если $n \leq N(\varepsilon)$, то положить $v=v+1$ и и перейти к шагу 2 (это соответствует необходимости более точного определения исходных данных, определяющих функцию Y , а также увеличению точности вычислений).

Шаг 15. Конец.

Здесь k — любое целое число, не превышающее величины $N(\varepsilon)$.

Если априори не известно, что при $n < k$ ($k > 1$) требуемая точность приближения δ не может быть достигнута, то можно начинать расчет со значения $k=1$.

На основе приведенного алгоритма можно решать задачи аппроксимации трансцендентных передаточных функций объектов управления с распределенными параметрами. Для этого достаточно определить интегральное преобразование передаточной функции по всем переменным, т.е. $Y(q)$ и записать интегральное уравнение (5), где $K(q, x)$ — ядро интегрального преобразования, а $z(x)$ — оригинал передаточной функции. Определив $\tilde{z}(x)$ и преобразовав его по Лапласу относительно времени t , получим искомое аппроксимирующее выражение.

Приведенный алгоритм составляет основу соответствующей программы.

Для решения экстремальной задачи (шаг 5) разработан алгоритм, использующий комбинацию метода градиентного спуска, метода осреднения перемещений и метода «наказания случайностью» [12,13].

Поисковая задача формулируется следующим образом. В прямоугольной области Q , определяемой системой неравенств

$$x_{H_i} \leq x_i \leq x_{B_i} \quad (i = 1, \dots, l)$$

найти минимум функции $F(x_1, \dots, x_l)$ при условии выполнения ограничений

$$G_k(x_1, \dots, x_l) \leq 0 \quad (k=1, \dots, \mu) \quad (22)$$

Учет ограничений (22) осуществляется по методу внешних штрафных функций, т.е. в прямоугольной области Q отыскивается минимум функции

$$F_0(x_1, \dots, x_l) = F(x_1, \dots, x_l) + \sum_{k=1}^{\mu} a_k G_k(x_1, \dots, x_l) \quad (23)$$

где $\{a_k\}$ – штрафные коэффициенты.

С учетом специфики данной задачи, а также в целях усовершенствования вычислительной процедуры в алгоритм и фортран-программу, приведенные в [13], введены следующие основные процедуры.

1. В прямоугольной области Q пространства независимых переменных проводится заданное число серий поисков. В каждой серии продвижение к минимуму функции F производится в следующей последовательности:

- a) по методу градиентного спуска;
- б) по методу осреднения перемещений;
- в) по методу «наказания случайностью».

Переход от одного метода поиска к другому производится либо при неудачном очередном шаге в направлении предполагаемого минимума, либо при неудачных нескольких случайных пробах из одной точки, число которых задается.

2. Очередной шаг в направлении предполагаемого минимума ограничен как по минимуму, так и по максимуму.

3. При переходе от одной серии поисков к другой уменьшается максимально допустимая величина шага поиска, причем, так, что в последней серии максимальный шаг в направлении экстремума функции равен минимально допустимой его величине.

4. Координаты минимума вычисляются с заданной точностью.

5. Величина шага при определении антиградиента берется пропорциональной минимально допустимому значению рабочего шага в направлении минимума.

6. При формировании очередного шага поиска проводится его масштабирование.

ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Программа составлена в современной версии алгоритмического языка ФОРТРАН 90/95 [14] и обеспечивает вычисление искомых значений параметров $\{a\}$ и коэффициентов $\{D\}$ при определении приближенного аналитического выражения искомой функции $z(x)$ в виде ряда (1.3) на базе интегрального уравнения (2.17). Она включает в себя головной модуль MAIN PROGRAM и следующие основные под-

программы:

1. SUBROUTINE POISC.
2. SUBROUTINE FUN.
3. SUBROUTINE DGAUS.
4. SUBROUTINE FORMA.
5. SUBROUTINE RES.

Кроме того, при решении конкретной задачи от пользователя требуется написание следующих подпрограмм:

1. SUBROUTINE PLAN.
2. SUBROUTINE FIJ.
3. SUBROUTINE YI.
4. SUBROUTINE FI.
5. SUBROUTINE CON.
6. SUBROUTINE GR.
7. SUBROUTINE DOPT1.
8. SUBROUTINE DOPT2.

Назначение головного модуля и перечисленных подпрограмм изложено в [14]. Взаимосвязь подпрограмм представлена на рис.1, где обозначено: 1-универсальные подпрограммы; 2-специализированные подпрограммы; 3-разовые подпрограммы.

АПРОБАЦИЯ И ПОДТВЕРЖДЕНИЕ

Для подтверждения эффективности счета рассмотрим расчет таких динамических характеристик процессов массообмена и диффузии, которые хотя и не имеют точного решения, но на сегодняшний день имеют приближенное описание с теоретически обоснованной корректностью результата несмотря на аналитическую сложность этих рядов.

На практике часто применяемые режимы работы таковы, что можно считать, что взаимное влияние процессов массообмена и теплообмена друг на друга не существенно, т.е. массообмен не осложнен теплообменом, так как температура среды или материала в процессе изменяется незначительно. Такой массообмен описывается дифференциальным уравнением

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} &= K_{11} \nabla^2 U \\ \text{при красных условиях: } U(r, 0) &= W^*, \\ \frac{\partial U}{\partial r} &= 0 \Big|_{r=0}, \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\alpha_M}{\lambda_M} (U - \nu W_r) &= 0 \Big|_{r=R_0} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Физический смысл и формулы вычисления остальных параметров, входящих в вышеприведенные уравнения математической модели исследуемых объектов и систем, уточняются в конкретных задачах.

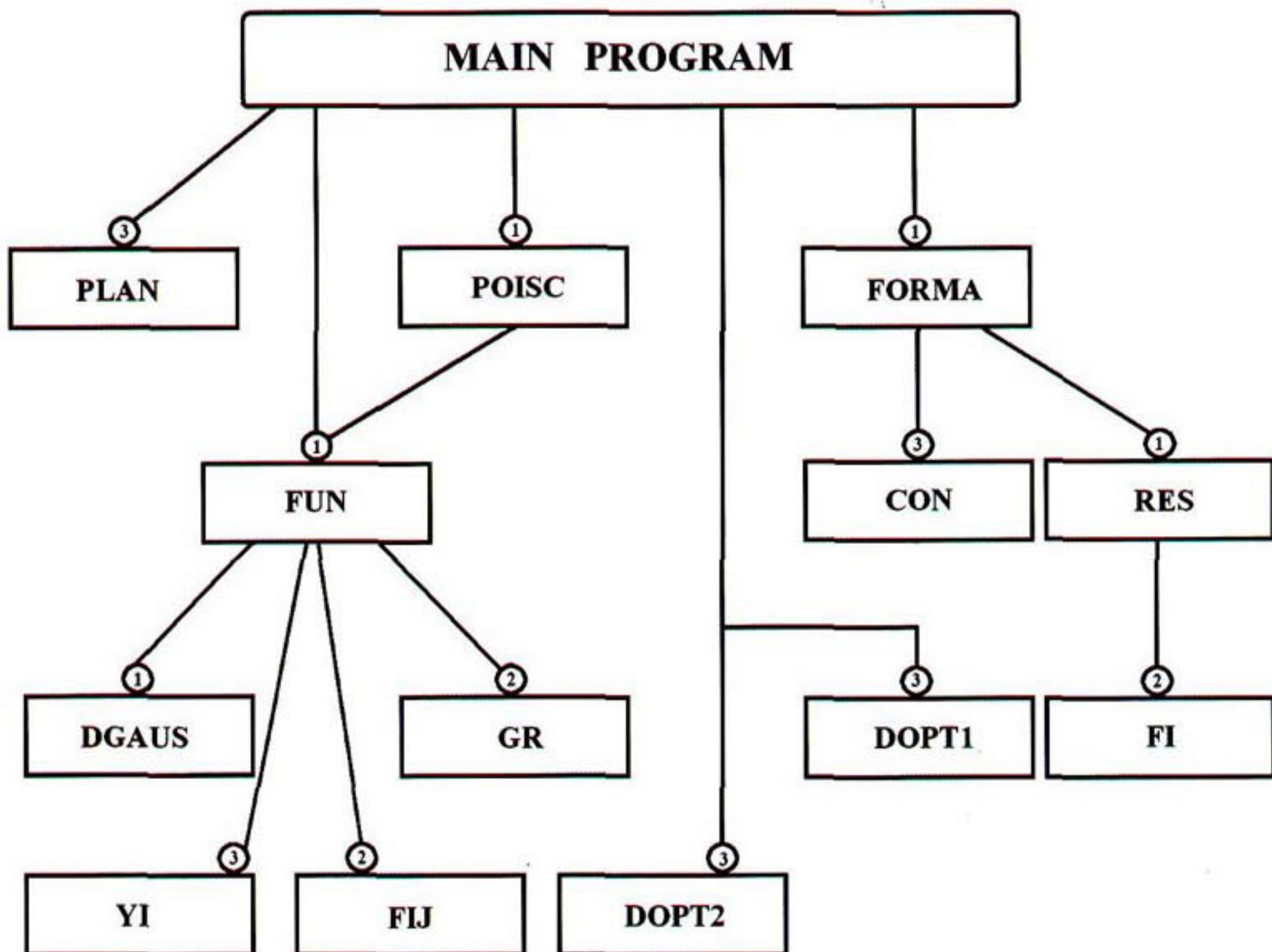


Рис. 3.1
Структурная схема программы.

К искомым динамическим характеристикам относятся пространственно-временные характеристики $U(r, \tau)$, их осреднения по объему $W(\tau)$, а также и, являющиеся решениями соответствующих уравнений математической модели [4]. Как показано в [8,9] соответствующей заменой искомых функций в этих дифференциальных уравнениях можно получить их более обобщенные решения, позволяющие судить о поведении системы при изменении начальных условий, граничных условий, параметров среды и некоторых параметров процесса, т.е. получить обобщенные динамические характеристики системы. Кроме того, в ходе решения дифференциальных уравнений математической модели с использованием преобразования Лапласа [11] можно выявить так называемые элементарные распределенные звенья (ЭРЗ), динамические характеристики которых также следует отнести к искомым, так как при их наличии определение динамических характеристик всей системы или составляющих ее частей не будет вызывать затруднений.

При постоянных коэффициентах в краевых условиях в (24) можно получить решения дифференци-

альных уравнений описанной выше математической модели в изображениях по Лапласу, т.е. функции параметра интегрального преобразования s и координаты R или X , если воспользоваться преобразованием Лапласа по $\tau \in [0, \infty)$ или $F_0 \in [0, \infty)$ [8,9]. Так, при граничных условиях первого, второго или третьего рода в этом случае по дифференциальному уравнению Фурье можно получить [8,9]

$$\bar{\Theta}(R, s) = A(s)W_1(R\sqrt{s}) + B(s)W_2(R\sqrt{s}), \quad (25)$$

где $A(s)$ и $B(s)$ — коэффициенты, определяемые граничными условиями, а $W_1(R\sqrt{s})$ и $W_2(R\sqrt{s})$ — передаточные функции по соответствующим каналам воздействия. Как $A(s)$, $B(s)$, так и $W_1(R\sqrt{s})$, $W_2(R\sqrt{s})$ содержат в своей структуре гиперболические функции, если объект имеет форму пластины или шара, а при объекте цилиндрической формы — функции Бесселя. Их конкретные выражения для этих трех основных форм тела даны в работах [8, 9].

В ряде случаев передаточные функции распределенных объектов содержат трансцендентные составляющие вида

$$W(X, s) = e^{-\Phi(s)X} \quad (26)$$

Наличие в составе выражений для передаточных функций трансцендентных составляющих затрудняет определение их оригиналов (импульсных переходных функций) и исследование динамических свойств системы с помощью известных методов, опирающихся на дробно-рациональный вид передаточных функций [3]. Поэтому имеет место необходимость в дробно-рациональной аппроксимации либо всей передаточной функции системы, либо трансцендентных ее составляющих, каждую из которых можно назвать передаточной функцией элементарного распределенного звена (ЭРЗ) исследуемой системы.

Определив с достаточной точностью приближенные дробно-рациональные выражения для передаточных функций этих звеньев, а соответственно и приближения для импульсных переходных функций и исследовав их динамические свойства, по полученным результатам можно определить дробно-рациональные выражения для передаточных функций всей системы и дать оценку ее динамических свойств. Для достижения этих результатов можно воспользоваться, например, теоремами операционного исчисления, а также методами структурных преобразований [3,15].

Рассмотрим возможности и особенности приближенного расчета переходных, импульсных переходных функций, а также дробно-рациональной аппроксимации передаточных функций элементарных распределенных звеньев на основе спектральной оптимизации. Для этой цели рассчитаем динамические характеристики элементарных распределенных звеньев, перечисленных в таблице 1.

Звено ЭРЗ1 относится к классу элементарных звеньев с передаточной функцией (26), причем $d(s) = \beta_0\beta_1 / (s + \beta_1 + \beta_2)$, $d_1 = \beta_0\beta_1 / (\beta_1 + \beta_2)$; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ —постоянные параметры. Звенья ЭРЗ2,...,ЭРЗ5 и ряд других являются наиболее употребительными элементарными звеньями, определяющими передаточные функции объектов типа «пластина», «шар», «цилиндр», описываемых дифференциальным уравнением Фурье, что характеризует практическую значимость расчетов их динамических характеристик.

Для получения более общих результатов выполним эти расчеты по обобщенным передаточным функциям звеньев (кроме ЭРЗ1), от которых можно перейти к исходным передаточным, переходным и импульсным переходным функциям соответствующей заменой переменных. Кроме того, учтем, что

каждая из динамических характеристик $z(X, F_\theta)$ или $z(R, F_\theta)$ должна быть интегрируемой квадратом, т.е. $z(X, F_0) \in L_2[0, \infty)$ при любом значении $X \in [0, X_0]$ или $z(R, F_0) \in L_2[0, \infty)$ при любом значении $R \in [R_1, R_2]$. В изображениях, содержащих \sqrt{s} сделаем замену параметра интегрального преобразования, исключающую процедуру извлечения квадратного корня.

С учетом сделанных замечаний имеем следующее исходное интегральное уравнение первого рода:

$$\int_0^\infty K(s, F_0) z(F_0) dF_0 = Y(s) \quad (27)$$

выражения для ядра которого $K(s, F_\theta)$ и правой части $Y(s)$ даны в таблице 1.

Для оценки точности приближения в качестве опорного решения $z_0(F_\theta)$ для звена ЭРЗ1 примем оригинал его динамической характеристики, полученный путем разложения изображения $Y(s)$ в ряд Тейлора и обращения каждого члена ряда на основе теорем операционного исчисления [16],

$$z_0(F_0) = \frac{1}{A} \left\{ 1 - e^{-d_1 X} \left[1 + \frac{b_1}{b_2} X (1 - e^{-b_2 F_0}) - e^{-b_2 F_0} \sum_{l=1}^{\infty} B_{0l} f_{0l}(F_0) \right] \right\}, \quad (28)$$

где

$$\frac{F_0^{i-1}}{b_2} - \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k \frac{(i-1)\cdots(i-k)}{(-b_2)^{k+1}} F_0^{i-1-k} \quad (29)$$

$$A = 1 - e^{-d_1 X} \quad (30)$$

Для остальных звеньев опорные решения

$$z_0(F_0) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{0i} f_{0i}(F_0) \quad (31)$$

получены на основе представления соответствующих изображений в виде обобщенных полиномов, к которым возможно применение теорем обращения. Ряд выражений для $z_0(F_\theta)$ заимствован из работы [17]. Коэффициенты $\{B_{0i}\}$ и функции $\{f_{0i}(F_\theta)\}$, входящие в формулы (28), (31), результаты приближенного расчета динамических характеристик звеньев в виде

$$\tilde{z}(F_0) = \sum_{i=1}^n D_i K(\alpha_i, F_0), \quad (32)$$

а именно: полученные значения $n, \alpha_i, D_i, i=1, \dots, n$ также приведены в таблице 1. Для анализа результатов там же указаны: F_θ —значение F_θ , при котором динамическая характеристика имеет максимум; $F(n, a)$ —значение функции F при расчетных значениях параметров $\{a\}$, входящих в формулу (4.77); F_0'' —значение F_θ , при котором имеет место максимальное абсолютное уклонение $\Delta z(F_0) = \tilde{z}(F_0) - z(F_0)$ расчетного решения $\tilde{z}(F_0)$ от $z(F_0)$.

На рисунках, указанных в таблице, приведены переходные функции G или импульсные переходные

Исходные данные и результаты расчетов динамических характеристик элементарных распределенных звеньев.
Таблица 1

Звено	ЭРЗ 1	ЭРЗ 2	ЭРЗ 3	ЭРЗ 4	ЭРЗ 5	
Передаточная функция	$e^{-[d_1-d(s)]X}$	$\frac{1}{ch(R\sqrt{s})}$	$\frac{th(R\sqrt{s})}{R\sqrt{s}}$	$\frac{1}{R\sqrt{ssh}(R\sqrt{s})}$	$\frac{1}{R\sqrt{s}I_1(R\sqrt{s})}$	
Обобщенная передаточная функция	-	$\frac{1}{ch(\sqrt{s})}$	$\frac{th(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{ssh}(\sqrt{s})}$	$\frac{1}{\sqrt{s}I_1(\sqrt{s})}$	
$Y(s)$	$\frac{A}{s} \left\{ 1 - e^{-[d_1-d(s)]X} \right\}$	$\frac{1}{ch(s)}$	$\frac{1}{s^2} - \frac{th(s)}{s^3}$	$\frac{1}{s sh(s)}$	$\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2sI_1(s)}$	
$K(s, F_0)$	e^{-sF_0}			$e^{-s^2F_0}$		
F'_0	0	0,15	0	0	0	
$z_0(F'_0)$	1	1,83	1	1	1	
B_{0i}	$\frac{(b_1 X)^i}{(i-1)! i!}$	$\pi(-1)^{i+1}(2i-1)$	$\frac{8}{\pi^2 (2i-1)^2}$	$2(-1)^{i+1}$	$-\frac{1}{J_0(\beta_i)}; J_1(\beta_i) = 0$	
$f_{0i}(F_0)$	$\frac{F_0^{i-1}}{B_2} - \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k \frac{(i-1)-(i-k)}{(-B_2)^{k+1}} F_0^{i-1-k}$		$e^{-\frac{\pi^2}{4}(2i-1)^2 F_0}$	$e^{-\pi^2 i^2 F_0}$	$e^{-\beta_i^2 F_0}$	
n	1	3	6	3	5	
a_i	0,0109	0,0149 0,016 0,019	1,57 2,65 4,9 7,87 8,26 8,44	1,55 3,1 8,6	3,139 5,421 5,962 6,958 16,1	3,384 3,646 5,606 5,708 7,48 11,61
D_i	1,03162	9,08279 -9,22310 1,14047	3,13972099 -0,040103854 -11,8382464 142,268794 -317,489473 183,905137	0,78070 0,08374 0,10695	1,97133 2,33600 -6,06976 2,80477 -0,04566	-0,05902 1,73628 50,7006 -54,3348 3,07272 -0,10930
$-F(n, a)$	48,8189	48,84534	1,094196	0,14057	0,11270	0,08777
F''_0	0	0	0	0	0	0
$\Delta z(F'_0)$	0,0316	0,00015	-0,0542	0,0286	0,00333	0,00653
Рисунок	1	2	3	4		

функции H звеньев, построенные по рассчитанному для каждого звена приближению $\tilde{z}(F_0)$ и по опорному решению $z_0(F_0)$, причем $z_0(F_0)$ вычислено при достаточно большом числе членов соответствующих рядов (не менее 20). Это гарантирует высокую точность приближения $z_0(F_0)$ к $z(F_0)$ и позволяет оценить точность приближения, достигнутую расчетным решением $\tilde{z}(F_0)$. Если рассчитывалась импульсная переходная функция, то, кроме нее, на рисунках показаны действительная Re и мнимая Im части амплитудно-фазовой характеристики (АФХ)

звеньев. Их точные значения определялись на основе исходных трансцендентных выражений для передаточных функций $W(s)$ [17], а приближенные — по расчетным выражениям для их приближений $\tilde{W}(s)$ в дробно-рациональном виде:

$$\tilde{W}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{\alpha_i^2 + s} \quad (33)$$

Приняв в (4.78) $s=j\omega$, нетрудно определить исходные частотные характеристики [15], а для сравнения полученных результатов с результатами работы [17] будем считать, что $\omega=2\mu^2$.

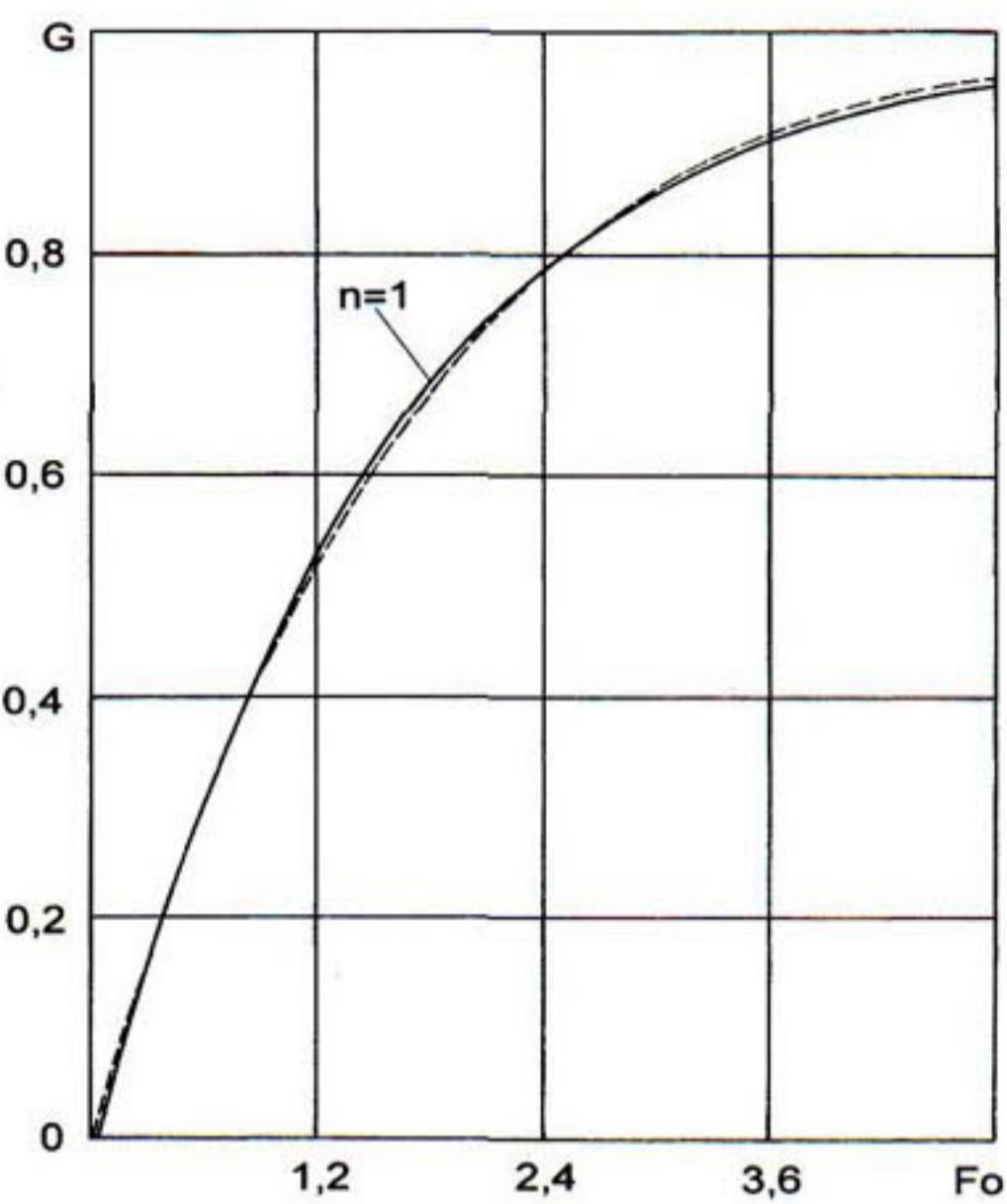


Рисунок 1
Расчетное (сплошная линия) и опорное (пунктируемая линия) приближения переходной функции (G) звена ЭРЗ1 (при $n=3$ расчетное и опорное приближения совпадают).

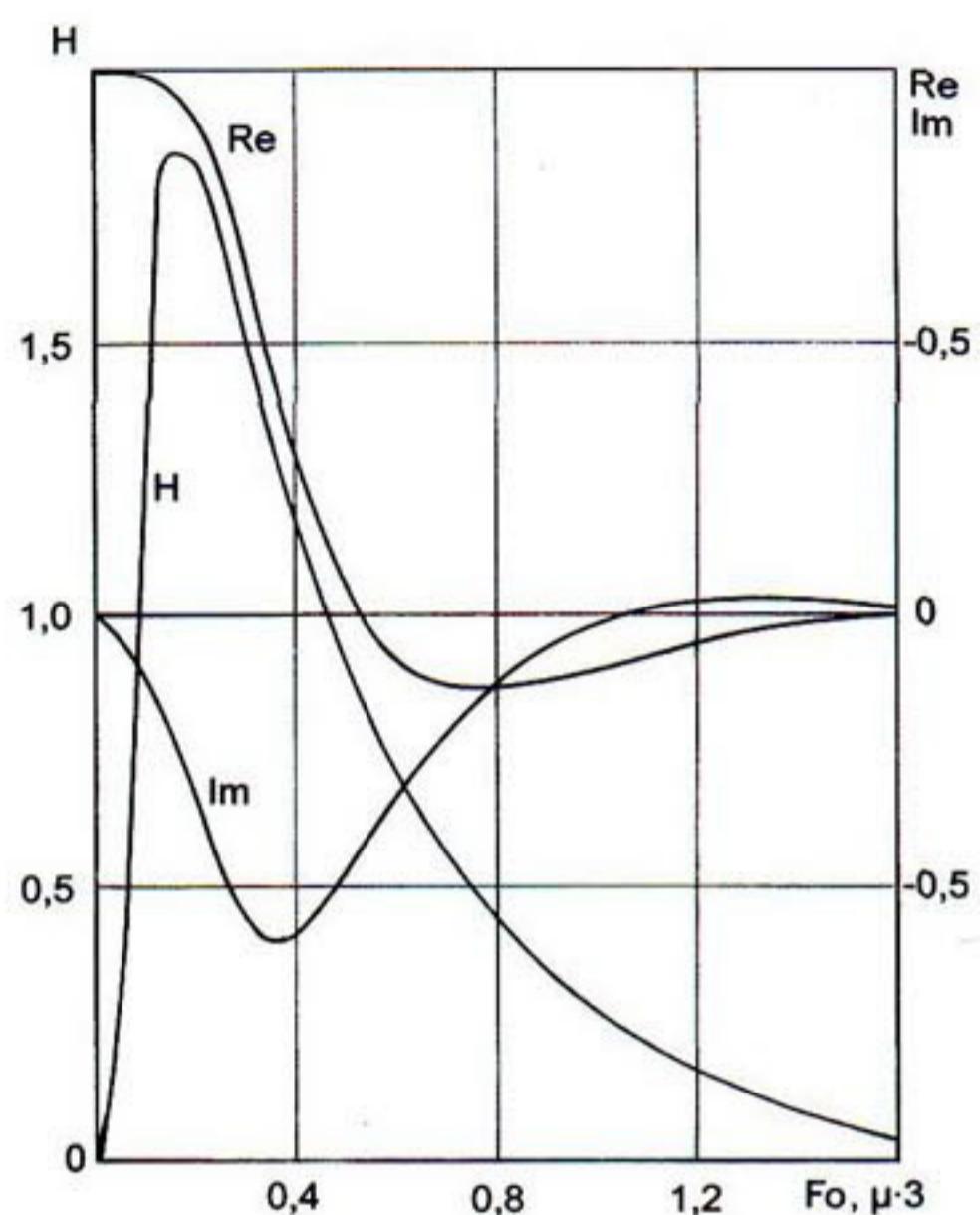


Рисунок 2
Импульсная переходная функция (H), действительная (Re) и мнимая (Im) части амплитудно-фазовой характеристики звена ЭРЗ2 (расчетные и опорные приближения совпадают).

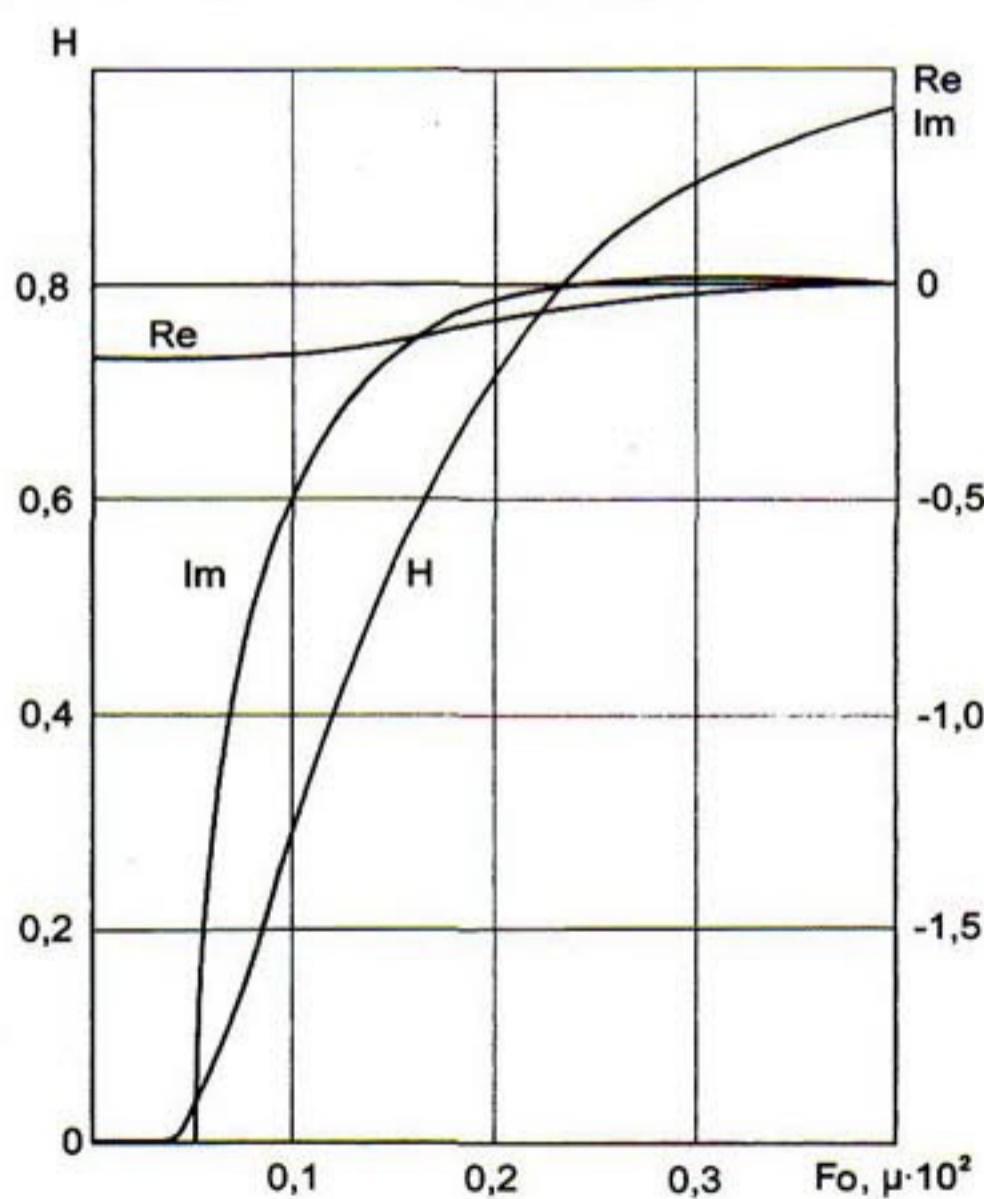


Рисунок 3
Импульсная переходная функция (H), действительная (Re) и мнимая (Im) части амплитудно-фазовой характеристики звена ЭРЗ4 (расчетные и опорные приближения совпадают).

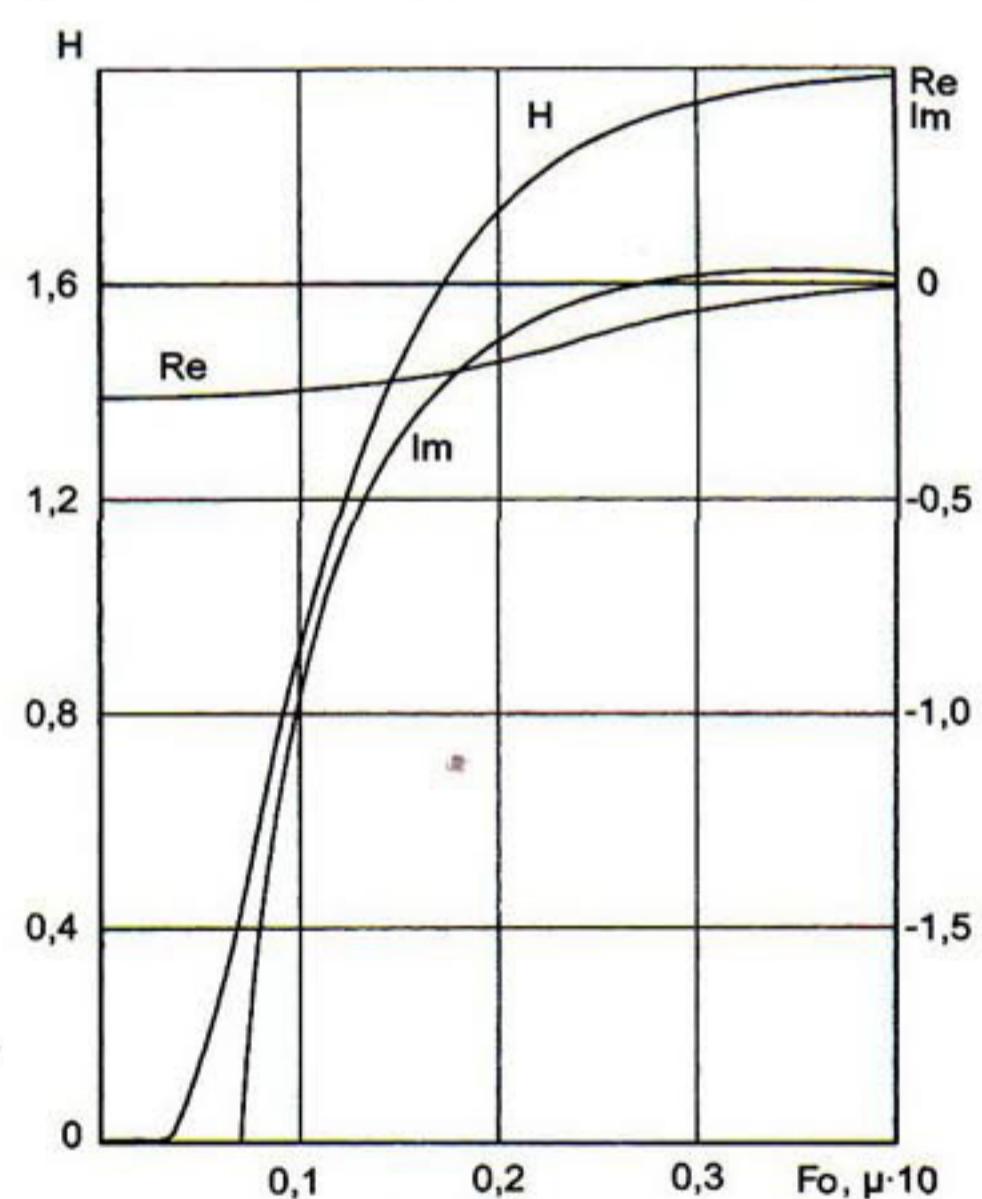


Рисунок 4
Импульсная переходная функция (H), действительная (Re) и мнимая (Im) части амплитудно-фазовой характеристики звена ЭРЗ5 (расчетные и опорные приближения совпадают).

ВЫВОДЫ:

1. Предложен численно-аналитический метод и программа расчета на ЭВМ аналитических выражений динамических характеристик широкого класса объектов и систем, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями обыкновенными или в частных производных с постоянными и переменными коэффициентами.

2. В качестве аналитических процедур метода используются процедуры известных интегральных

преобразований, например, преобразования Лапласа или иного, обеспечивающего взаимно однозначное соответствие между исходной краевой задачей и полученным интегральным уравнением.

2. Программное обеспечение метода обеспечивает поиск таких сечений ядра интегрального уравнения, которые дают максимально быструю сходимость приближения в виде ряда к искомой функции, что гарантирует корректность результатов счета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В.В., Бирюков В.Ф., Тумаркин В.И. Принцип сложности в теории управления. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
2. Солодовников В.В., Какичев Л.Г., Кожевников А.Б. Принцип минимальной сложности и расчет динамических характеристик объектов управления с распределенными параметрами. – Известия ВУЗов. Приборостроение, 1977, т.20, №3, с.29-36.
3. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 440 с.
4. Кожевников А.Б., Петросян О.П. Динамика инжекционных и эжекционных процессов массопереноса в технологических системах водоподготовки.- Водоочистка, Водоподготовка, Водоснабжение, 2010, №5, с.18-24.
5. Вода России. Математическое моделирование в управлении водопользованием/ Под науч. Ред. А.М. Черняева.-Екатеринбург: АКВПРЕСС, 2001.
6. Макухина О.В., Кондюрина Т.А., Фесенок Л.Н. Экспресс-метод прогнозирования загрязнения воды в близи речных водозаборов в условиях аварийных выбросов. – ВСТ, 2010, №4, с.14-18.
7. Гетманцев В.С. Моделирование и разработка процесса получения сульфата алюминия – коагуланта для водоочистки на ленточном кристаллизаторе: Автореф. дисс.... к.т.н.- М.: РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2009.-18 с.
8. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. – М.: Энергия, 1972.– 560 с.
9. Кошляков Н.С., Глинэр Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
10. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1967. – 416 с.
11. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971.
12. Кожевников А.Б. Алгоритм определения динамической характеристики объекта управления в виде быстросходящегося ряда (описание аналитических преобразований и форTRAN-программы). – М.: Госфонд алгоритмов и программ СССР, инв. №П003067, 1978, 72 с.
13. Кожевников А.Б. Программа спектральной оптимизации в классе неортогональных базисов. – М.: Роспатент, св. гос. рег. №2010612879, 2010, 59 с.
14. Горелик А.М. Программирование на современном Фортране.- М.: Финансы и статистика, 2006.- 700 с.
15. Теория автоматического регулирования. Кн. 1 / Под. ред. В.В. Солодовникова – М.: Машиностроение, 1967. – 768 с.
16. Диткин В.А. и Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – М.: Физматгиз, 1958. – 180 с.
17. Сергеев С.А. Двухпозиционное регулирование температуры объектов с распределенными параметрами. – М.: Энергия, 1975. – 96 с.